

# Análise Matemática IV

## Problemas para as Aulas Práticas

12 de Dezembro de 2006

### Semana 12

1. Calcule a série de Fourier da função  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ +1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

#### Resolução:

A série de Fourier associada a  $f$  será

$$SF[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x) \right)$$

em que

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \quad \text{e} \quad a_n = \int_{-1}^1 \cos(n\pi x) f(x) dx = 0$$

dado que  $f$  é uma função ímpar; e

$$b_n = \int_{-1}^1 \sin(n\pi x) f(x) dx = 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = -\frac{2}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi))$$

Assim

$$SF[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \sin(n\pi x)$$

Visto

$$1 - \cos(n\pi) = 1 - (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

podemos escrever

$$SF[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\pi x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[ \\ 0 & \text{se } x = -1, x = 0, x = 1 \end{cases}$$

2. Determine a série de Fourier da função  $g(x) = L - |x|$ , no intervalo  $[-L, L]$ . Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

**Resolução:**

A função  $f(x)$  pode ser escrita na forma

$$f(x) = \begin{cases} L+x & \text{se } x \in [-L, 0[ \\ L-x & \text{se } x \in [0, L] \end{cases}$$

A série de Fourier associada a  $f$  será

$$SF[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right)$$

em que

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L (L-x) dx = L$$

e para  $n > 1$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(n\pi x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(n\pi x) dx = \frac{2L}{n^2 \pi^2} (1 - \cos(n\pi))$$

Dado que  $f$  é uma função par podemos concluir que

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin(n\pi x) f(x) dx = 0$$

Assim

$$SF[f](x) = \frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{n^2 \pi^2} (1 - \cos(n\pi)) \cos \frac{n\pi}{L} x$$

Visto

$$1 - \cos(n\pi) = 1 - (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

podemos escrever

$$SF[f](x) = \frac{L^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L}{(2n-1)^2 \pi^2} \cos \frac{(2n-1)\pi}{L} x = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in ]-L, L[ \\ \frac{L}{2} & \text{se } x = -L, x = L \end{cases}$$

Para calcular o valor da série numérica, usaremos o facto de para  $x = 0$  se ter  $SF[f](0) = f(0)$ , isto é

$$\frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L}{(2n-1)^2 \pi^2} = L$$

pelo que

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3. Determine a série de Fourier da função  $h(x) = x^2$ , no intervalo  $x \in [-L, L]$ . Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Resolução:**

A série de Fourier associada a  $h$  será

$$SF[h](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right)$$

em que

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L h(x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{2L^2}{3}$$

e para  $n > 1$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L h(x) \cos(n\pi x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos(n\pi x) dx = \frac{4L^2}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi)$$

Dado que  $f$  é uma função par podemos concluir que

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin(n\pi x) h(x) dx = 0$$

Assim

$$SF[h](x) = \frac{L^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L^2}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \begin{cases} h(x) & \text{se } x \in ]-L, L[ \\ L^2 & \text{se } x = -L, x = L \end{cases}$$

Para calcular o valor da série numérica, usaremos o facto de para  $x = L$  se ter  $SF[h](L) = L^2$ , isto é

$$\frac{L^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L^2}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi) \cos(n\pi) = L^2$$

pelo que

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4. Considere as funções definidas por  $f(x) = 1$  e  $g(x) = x$ . Determine:

- (a) as séries de Fourier associadas a  $f$  e  $g$  no intervalo  $[-1, 1]$ ;
- (b) as séries de senos associadas a  $f$  e  $g$  no intervalo  $[0, 1]$ ;
- (c) as séries de cossenos associadas a  $f$  e  $g$  no intervalo  $[0, 1]$ .

**Resolução:**

(a) A série de Fourier associada a  $f$  no intervalo  $[-1, 1]$  é:

$$SF[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x) \right).$$

Como  $f$  é uma função par, podemos concluir que:

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 1 dx = 2$$

e para  $n > 1$

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 1 \cos(n\pi x) dx = \frac{2}{n\pi} (\sin(n\pi) - \sin(0)) = 0,$$

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx = 0.$$

Assim,

$$SF[f](x) = 1 = f(x).$$

A série de Fourier associada a  $g$  no intervalo  $[-1, 1]$  é:

$$SF[g](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)).$$

Como  $g$  é uma função ímpar, podemos concluir que:

$$a_0 = \int_{-1}^1 g(x) dx = 0,$$

e para  $n > 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 g(x) \cos(n\pi x) dx = 0, \\ b_n &= \int_{-1}^1 g(x) \sin(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx \\ &= 2 \left( -\frac{x}{n\pi} \cos(\pi n x) \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos(\pi n x) dx \right) \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos(\pi n) = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$SF[g](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin(n\pi x).$$

(b) Para obter a série de senos de uma função no intervalo  $[0, 1]$  temos de prolongá-la como funções ímpar ao intervalo  $[-1, 1]$ . A série de Fourier da função prolongada é a série de senos procurada.

A série de senos de  $f$  em  $[0, 1]$  é consequência da extensão ímpar ao intervalo  $[-1, 1]$ , isto é, da série de Fourier da função

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1] \\ -1 & \text{se } x \in [-1, 0] \end{cases}$$

pelo que a série procurada é (ver problema 1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) \sin(n\pi x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

A série de senos de  $g$  em  $[0, 1]$  é consequência da extensão ímpar ao intervalo  $[-1, 1]$ . Como  $g$  é ímpar, o prolongamento coincide com  $g$  e a série de senos é a série de Fourier que calculámos na alínea (a):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin(n\pi x).$$

(c) Para obter a série de cossenos de uma função no intervalo  $[0, 1]$  temos de prolongá-la como funções par ao intervalo  $[-1, 1]$ . A série de Fourier da função prolongada é a série de cossenos procurada.

Como  $f$  é uma função par, a série de cossenos no intervalo  $[0, 1]$  é a série de Fourier que calculámos na alínea (a), i.e., a série com um único termo constante 1.

A série de cossenos de  $g$  em  $[0, 1]$  é consequência da extensão par ao intervalo  $[-1, 1]$ , isto é, da série de Fourier da função

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ -x & \text{se } x \in [-1, 0] \end{cases}$$

Temos, pois, que a série procurada é:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x),$$

onde

$$a_0 = \int_{-1}^1 \tilde{g}(x) dx = 2 \int_0^1 g(x) dx = 2 \int_0^1 x dx = 1,$$

e para  $n > 0$ :

$$a_n = \int_{-1}^1 \tilde{g}(x) \cos(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 g(x) \cos(n\pi x) dx = 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = \frac{2}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1).$$

5. Considere a equação de propagação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (*)$$

- Mostre que as suas soluções estacionárias (isto é, que não dependem do tempo) são da forma  $u(x) = Ax + B$ .
- Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos  $x = 0$  e  $x = L$ , em que se fixam as temperaturas  $u(0, t) = T_1$ ,  $u(L, t) = T_2$ .
- Resolva a equação (\*) para  $0 \leq x \leq 1$  e para as condições iniciais e de fronteira

$$u(0, t) = 20, \quad u(1, t) = 60, \quad u(x, 0) = 75.$$

**Resolução: (a)** Uma solução é estacionária se e só se  $u_t = 0$ , pelo que as soluções estacionárias de (\*) são as funções  $u = u(x)$  que satisfazem  $u_{xx} = 0$ . É claro, então, que  $u$  tem de ser um polinómio de grau 1 em  $x$ :  $u(x) = Ax + B$ , onde  $A$  e  $B$  são constantes.

**(b)** Com  $u(x) = Ax + B$ , temos  $u(0) = B = T_1$  e  $u(L) = AL + B = T_2$ . Portanto

$$B = T_1 \quad \text{e} \quad A = \frac{T_2 - B}{L} = \frac{T_2 - T_1}{L}.$$

A solução estacionária pretendida é  $u(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$ .

**(c)** Identificamos, em relação às alíneas anteriores,  $L = 1$ ,  $T_1 = 20$  e  $T_2 = 60$ . Designando por  $w(x, t)$  a diferença entre a solução estacionária  $u(x) = 40x + 20$  e a solução do problema  $u(x, t)$ , ou seja

$$w(x, t) = u(x, t) - 40x - 20,$$

vemos que  $w(x, t)$  é solução do problema:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{com} \quad w(0, t) = w(1, t) = 0 \quad \text{e} \quad w(x, 0) = 55 - 40x.$$

Usando o método da separação de variáveis obtemos

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t} \sin(n\pi x).$$

Donde

$$55 - 40x = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi x).$$

Determinamos os coeficientes desta série de senos da forma habitual, recorrendo a integração por partes:

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 (55 - 40x) \sin(n\pi x) dx \\ &= 2 \left[ (55 - 40x) \frac{\cos(n\pi x)}{-n\pi} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 (-40) \frac{\cos(n\pi x)}{-n\pi} dx \\ &= 2 \left( (55 - 40) \frac{\cos(n\pi)}{-n\pi} - \frac{55}{-n\pi} \right) \\ &= 2 \left( \frac{15}{n\pi} (-1)^{n+1} + \frac{55}{n\pi} \right) \\ &= \frac{10}{n\pi} \left( 3(-1)^{n+1} + 11 \right). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 20 + 40x + w(x, t) \\ &= 20 + 40x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10}{n\pi} \left( 3(-1)^{n+1} + 11 \right) \exp(-n^2 \pi^2 \alpha^2 t) \sin(n\pi x) \end{aligned}$$

Note-se que esta solução é  $C^\infty$  para  $t > 0$ , e contínua para  $0 < x < 1$  e  $t = 0$ , mas descontínua nos pontos  $(x, t) = (0, 0)$  e  $(x, t) = (1, 0)$  porque a condição inicial não é compatível com as condições fronteira.

6. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (t \geq 0, x \in [0, 1]) \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \\ u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 1, \end{cases}$$

onde  $c$  é um parâmetro real.

**Resolução:** Recorrendo ao método da separação de variáveis, utilizando as condições fronteira  $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ , obtemos soluções da forma:

$$(A_n \cos(n\pi ct) + B_n \sin(n\pi ct)) \sin(n\pi x),$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Assim, procuramos uma solução da forma:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(n\pi ct) + B_n \sin(n\pi ct)) \sin(n\pi x).$$

Impondo a condição inicial:

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(n\pi x) = 0,$$

concluimos que  $A_n = 0$ , para todo o  $n$ . Por outro lado, derivando  $u(t, x)$  em ordem a  $t$ , obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\pi c B_n \cos(n\pi ct) \sin(n\pi x),$$

pelo que a segunda condição inicial fornece:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\pi c B_n \sin(n\pi x) = 1.$$

Precisamos, pois, de expandir a função constante 1, numa série de senos no intervalo  $[0, 1]$ . Isto fornece os coeficientes (ver problema 4):

$$n\pi c B_n = 2 \int_0^1 \sin(n\pi x) dx = \frac{\cos(n\pi) - 1}{-n\pi},$$

ou seja

$$B_n = \frac{2(1 - (-1)^n)}{n^2 \pi^2 c}.$$

Portanto a solução é

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{n^2 \pi^2 c} \sin(n\pi ct) \sin(n\pi x).$$

7. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y \in [0, 1]) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = \cos(2\pi x), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, & \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = \cos(2\pi y). \end{cases}$$

**Resolução:** Começamos por observar que basta resolver cada um dos problemas:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, 0) = 0, & \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, 1) = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, y) = 0, & \frac{\partial u_1}{\partial x}(1, y) = \cos(\pi y), \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, 0) = 0, & \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, 1) = \cos(2\pi x), \\ \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, y) = 0, & \frac{\partial u_2}{\partial x}(1, y) = 0. \end{cases}$$

pois a solução procurada é a soma das soluções de cada um destes problemas:

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y).$$

Recorrendo ao método da separação de variáveis, e utilizando as condições fronteira  $\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, 1) = \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u_1}{\partial x}(1, y) = 0$ , obtemos soluções para o primeiro sistema da forma:

$$\cosh(n\pi x) \cos(n\pi y), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Assim, vemos que a solução do primeiro sistema é da forma

$$u_1(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cosh(n\pi x) \cos(n\pi y),$$

e de forma semelhante para  $u_2$ , já que  $u_2(x, y) = u_1(y, x)$ .

Impondo as condições fronteira  $\frac{\partial u_1}{\partial x}(1, y) = \cos(2\pi y)$  e  $\frac{\partial u_2}{\partial y}(x, 1) = \cos(2\pi x)$ , obtemos,

$$u_1(x, y) = \frac{a_0}{2} + \frac{\cosh(2\pi x) \cos(2\pi y)}{2\pi \sinh(2\pi)} \quad \text{e} \quad u_2(x, y) = \frac{a_0}{2} + \frac{\cosh(2\pi y) \cos(2\pi x)}{2\pi \sinh(2\pi)}.$$

A solução pretendida é pois

$$u(x, y) = c + \frac{\cosh(2\pi x) \cos(2\pi y) + \cosh(2\pi y) \cos(2\pi x)}{2\pi \sinh(2\pi)},$$

onde  $c$  é uma constante arbitrária.



8. Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, & (x \in [0, \pi]) \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin x. \end{cases}$$

**Resolução:**

Recorrendo ao método da separação de variáveis, e utilizando as condições fronteira  $u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$  obtemos soluções da forma:

$$e^{(2-n^2)t} \cos(nx) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Tomando combinações lineares destas soluções chegamos a

$$u(x, t) = \frac{a_0 e^{2t}}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{(2-n^2)t} \cos(nx).$$

Para determinar os coeficientes  $a_n$ , impomos que  $u(x, t)$  satisfaça a condição inicial, o que fornece:

$$u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) = \sin x.$$

Ou seja, os  $a_n$  são os coeficientes do desenvolvimento da função  $\sin x$  numa série de cossenos no intervalo  $[0, \pi]$ . Da forma usual, obtemos:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx \, dx = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1+(-1)^n}{1-n^2} & \text{se } n \neq 1 \\ 0 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

Logo a solução procurada é:

$$u(x, t) = \frac{2e^{2t}}{\pi} \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2e^{-4n^2t}}{1-4n^2} \cos(2nx) \right).$$

9. Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, & (x \in [0, 2\pi]) \\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = x \end{cases}$$

**Resolução:**

Recorrendo ao método da separação de variáveis, e utilizando as condições fronteira  $u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0$ , obtemos soluções da forma:

$$e^{-\frac{n^2}{4}t - \frac{t^2}{2}} \cos\left(\frac{n}{2}x\right).$$

Formando combinações lineares, concluímos que a solução toma a forma:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} e^{-\frac{t^2}{2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\frac{n^2}{4}t - \frac{t^2}{2}} \cos\left(\frac{n}{2}x\right).$$

Impondo que esta solução verifique a condição inicial

$$u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n}{2}x\right) = x,$$

vemos que os  $a_n$  são os coeficientes da expansão da função  $f(x) = x$  numa série de cossenos no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Ou seja, para  $n = 0$ :

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{(2\pi)^2}{4\pi} = \pi$$

e para  $n \neq 0$ :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos\left(\frac{n}{2}x\right) dx = \frac{4}{\pi n^2} ((-1)^n - 1).$$

Assim, a solução procurada é:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \pi e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2} e^{-\frac{n^2+2t}{4}t} \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \\ &= \pi e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2} e^{-\frac{4n^2+2t}{4}t} \cos(nx). \end{aligned}$$

10. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x, 0, t) = x, \quad u(x, 1, t) = x \\ u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 1 \\ u(x, y, 0) = x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \cos(2\pi(x-y)) - \cos(2\pi(x+y)) \end{cases}$$

para  $x, y \in [0, 1]$  e  $t \in \mathbb{R}$ .

### Solução:

Procurando uma solução  $v$  que não dependa de  $t$  e que satisfaça as condições fronteira, obtemos  $v(x, y) = x$ .

Pelo que se definirmos  $\omega(t, x, y) = u(t, x, y) - x$ , esta função  $\omega$  satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \\ \omega(t, x, 0) = 0, \quad \omega(t, x, 1) = 0 \\ \omega(t, 0, y) = 0, \quad \omega(t, 1, y) = 0 \\ \omega(0, x, y) = 0. \end{cases}$$

Usando o método da separação de variáveis para resolver este último problema, chegamos à seguinte solução formal:

$$\omega(t, x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} c_{m,n} \sin(\sqrt{(m^2 + n^2)\pi}t) \sin(m\pi x) \sin(n\pi y).$$

Atendendo que  $\cos(2\pi(x-y)) - \cos(2\pi(x+y)) = 2\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$ , vem

$$u(t, x, y) = x + \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sin(\sqrt{8}\pi t)\sin(2\pi x)\sin(2\pi y).$$